Übungsblatt 3, Photonik, Prof. Piet Schmidt

Besprechung am 26.10.2009.
Lösungen werden auf der Webseite www.quantummetrology.de hinterlegt.

Aufgabe 3: Kramers-Kronig Relationen

a) Im Falle von homogenen Materialen kann man den Brechungsindex als komplexe analytische Funktion schreiben

$$\tilde{n}(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega)$$

Diese Eigenschaft kann bei der Bestimmung der Dispersionsfunktion helfen.

Zeige, dass unter Annahme eines Lorentzprofils als Absorptionsfunktion

$$\kappa(\omega) = \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2}$$

die folgende Funktion

$$\tilde{n}(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_0) + i\Gamma}$$

analytisch ist. Bestimme $n(\omega)$ und skizziere beide Graphen.

Tipp: Ersetze ω durch ein komplexes $\omega = \omega_r + i\omega_i$ und zeige, dass die Funktion analytisch ist. Eine Funktion f ist analytisch bzw. komplex differenzierbar, wenn die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt sind, i.e.

$$\begin{aligned} f &= f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

b) Angenommen, es gäbe keine Absorption in einem homogenen Material. Was können wir über die Dispersion aussagen?

Jede Antwort, die mehr als zwei bis drei Zeilen hat, ist hier zu viel!

c) Es ist oft leichter Amplituden statt Phasen zu messen. Wie kann man die Methode in Teil a) nutzen, um die Phasenabhängikeit einer Reflektion zu bestimmen.

Tipp:

$$r(\omega) = \rho(\omega)e^{i\phi(\omega)}$$

Generelle Anmerkung zu den Kramers-Kronig Beziehungen

Es gibt einen allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Real- und Imaginärteil der Suzeptibilität

$$\begin{aligned}
\chi &= \chi'(\nu) + i\chi''(\nu) \\
\chi'(\nu) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty ds\, \frac{\chi''(s)\cdot s}{s^2-\nu^2} \\
\chi''(\nu) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty ds\, \frac{\chi'(s)\cdot s}{\nu^2-s^2}
\end{aligned}$$

Dies sind die sogenannten Kramers-Kronig-Beziehungen und geben z.B. einen Zusammenhang zwischen der frequenzabhängigen Absorption und Dispersion an. Voraussetzung: χ muss analytisch sein und im unendlichen schnell genug abfallen.

Übungsblatt 2 - Lösungen, Photonik, Prof. Piet Schmidt

Aufgabe 3

a)

$$\begin{aligned}
\tilde{n}(\omega) &= \frac{1}{(\omega_r + i\omega_i - \omega_0) + i\Gamma} \\
&= \frac{1}{(\omega_r - \omega_0) + i\,(\omega_i + \Gamma)} \\
&= \frac{1}{(\omega_r - \omega_0) + i\,(\omega_i + \Gamma)} \left(\frac{(\omega_r - \omega_0) - i\,(\omega_i + \Gamma)}{(\omega_r - \omega_0) - i\,(\omega_i + \Gamma)} \right) \\
&= \underbrace{\frac{(\omega_r - \omega_0)}{(\omega_r - \omega_0)^2 + (\omega_i + \Gamma)^2}}_{R(\tilde{n})} - i \underbrace{\frac{(\omega_i + \Gamma)}{(\omega_r - \omega_0)^2 + (\omega_i + \Gamma)^2}}_{I(\tilde{n})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R(\tilde{n})}{\partial \omega_r} &= \frac{-(\omega_r - \omega_0)^2 + (\omega_i + \Gamma)^2}{\left((\omega_r - \omega_0)^2 + (\omega_i + \Gamma)^2\right)^2} = \frac{\partial I(\tilde{n})}{\partial \omega_r} \\
\frac{\partial R(\tilde{n})}{\partial \omega_i} &= \frac{-2(\omega_i + \Gamma)(\omega_r - \omega_0)}{\left((\omega_r - \omega_0)^2 + (\omega_i + \Gamma)^2\right)^2} = -\frac{\partial I(\tilde{n})}{\partial \omega_i}
\end{aligned}$$

b) Mit Hilfe der Cauchy-Relationen zeigt man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa}{\partial \omega_r} = \frac{\partial \kappa}{\partial \omega_i} &= 0 \\
\rightarrow \frac{\partial n}{\partial \omega_r} &= 0 \\
\rightarrow \frac{\partial n}{\partial \omega_i} &= 0 \\
\rightarrow n &= const.
\end{aligned}$$

D.h. ein Material ohne Absorption kann auch keine frequenzabhängige Dispersion aufzeigen.

c)

$$
\begin{aligned}
r(\omega) &= \rho(\omega)e^{i\phi(\omega)} \\
\log(r(\omega)) &= \log(\rho(\omega)) + \log(\phi(\omega))
\end{aligned}
$$

Durch den Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil kann man eine frequenzabhängige Amplitudenfunktion messen und damit die frequenzabhängige Phasenfunktion ausrechnen.