Übungsblatt 1, Photonik, Prof. Piet Schmidt

Lösungen werden auf der Webseite www.quantummetrology.de hinterlegt.

Aufgabe 1: Bow-Tie Resonator

a) Wie lautet die ABCD-Matrix für einen 'bow-tie' Resonator mit vier Spiegeln und einem eingebauten Kristall?

b) Wann ist dieser Resonator stabil? Zeichne das Stabilitätsdiagramm dieses Resonators!

c) Wie ist der minimale Radius (waist) eines Gaussstrahls zwischen den planaren Spiegeln bzw. zwischen den gekrümmten Spiegeln (im Kristall)?

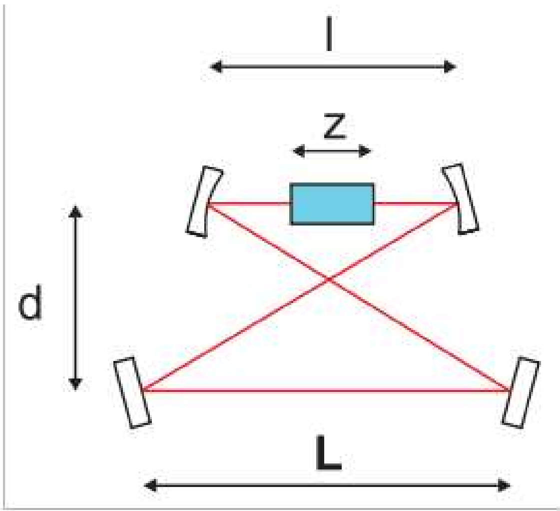

Figure 1: Bow-Tie Resonator

Aufgabe 2: Bessel-Beams

a) Beweise, dass die Helmholtz-Gleichung im freien Raum

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0 \tag{1}$$

durch die folgende Funktion gelöst werden kann

$$U(x, y, z) = A(x, y)e^{-i\beta z} \tag{2}$$

wobei $A(x, y)$ eine reelle Funktion und β eine Konstante ist. Wie lautet die resultierende Gleichung für die komplexe Amplitude $A(x, y)$?

Hinweis: Die Gleichung sollte sehr ähnlich zu der ursprünglichen Helmholtz-Gleichung (Gl. (1)) sein. Beachte, dass A nur eine Funktion von x und y ist.

b) Beweise, dass die Lösung der (Gl. (2)) folgende Form in Polarkoordinaten (ρ, ϕ) hat:

$$A_m(\rho, \phi) = C \cdot J_m(k_t \rho) \cdot e^{im\phi} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{3}$$

wobei C eine reelle Konstante und J_m die Bessel-Funktionen der ersten Art und m-ten Ordnung sind.

Hinweis: Mit den folgenden Relationen sollte diese Rechnung ein Drei-Zeiler sein:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\partial_\rho \left(\rho \partial_\rho\right) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2 + \partial_z^2 \tag{4}$$

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho \left(\rho \partial_\rho J_m(k_t \rho)\right) = \left(\frac{m^2 - k^2\rho^2}{\rho^2}\right) J_m(k_t \rho) \tag{5}$$

c) Eigenschaften von Besselstrahlen:

- Welche Art von Symmetrie hat die Intensität eines Besselstrahls?
- Zeige, dass ein Besselstrahl in Propagationsrichtung nicht divergent ist.
- Zeichne (qualitativ) $A_0(\rho, \phi)$ als Funktion von ρ.

d) Ein in transversaler Richtung endlich ausgedehnter Strahl, der keine Divergenz zeigt, steht im Widerspruch zur Unschärferelation. Warum? Hier reicht eine qualitative Begründung!

e) Wie ist dieses Paradoxon im Falle eines Besselstrahls gelöst? Berechne hierzu die Unschärfe $\Delta\rho$ eines Besselstrahls in transversaler Richtung, wobei

$$(\Delta\rho)^2 := \int_0^\infty d\rho \cdot A(\rho) \cdot \rho^2 \tag{6}$$

Hinweis: Verwende die folgende Näherung an die Bessel-Funktionen:

$$x \gg 1 \quad \rightarrow \quad J_\alpha(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{7}$$

Lösungen Übungsblatt 1, Photonik, Prof. Piet Schmidt

Aufgabe 1: Bow-Tie Resonator

a)

b)

c)

Aufgabe 2: Bessel-Beams

a) Einsetzen des Ansatzes in die Helmholtzgleichung führt zu

$$
\begin{aligned}
& \nabla^2 A e^{-i\beta z} + k^2 A e^{-i\beta z} && (8)\\
= & \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right) A e^{-i\beta z} + k^2 A e^{-i\beta z} && (9)\\
= & \left(\partial_x^2 A(x,y) + \partial_y^2 A(x,y) + (k^2-\beta^2) A(x,y)\right) e^{-i\beta z} = 0 && (10)\\
\rightarrow \quad & \left(\nabla_t^2 + k_t^2\right) A(x,y) = 0 && (11)
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
\nabla_t^2 &= \partial_x^2 + \partial_y^2 && (12)\\
k_t^2 &= k^2 - \beta^2 && (13)
\end{aligned}
$$

b) Einsetzen der Lösung führt zu folgender Gleichung:

$$
\begin{aligned}
& \nabla_t A_m + k_t^2 A_m && (14)\\
= \quad & C \frac{1}{\rho} \partial_\rho \left(\rho \partial_\rho J_m(k_t \rho)\right) \cdot e^{im\phi} && (15)\\
& + C \frac{1}{\rho^2} J_m(k\rho) \cdot \partial_\phi^2 e^{im\phi} && (16)\\
& + C k_t^2 J_m(k_t \rho) \cdot e^{im\phi} && (17)\\
= \quad & C \cdot e^{im\phi} \cdot \left(\frac{m^2 - k_t^2 \rho^2}{\rho^2}\right) J_m(k_t \rho) && (18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
- \quad & C \cdot \frac{m^2}{\rho^2} \cdot e^{im\phi} J_m(k_t\rho) && (19)\\
+ \quad & C \cdot k_t^2 \cdot e^{im\phi} J_m(k_t\rho) && (20)\\
= \quad & 0 && (21)
\end{aligned}
$$

c) Die Intensität I des Besselstrahls ist rotationssymmetrisch, da

$$I = \left|A(\rho, \phi) \cdot e^{-i\beta z}\right|^2 = |C|^2 \cdot |J_m(k_t\rho)|^2 \tag{22}$$

nicht von dem Winkel ϕ abhängt.

Da die komplexe Amplitude $U(x, y, z)$ nur eine phasenabhängigkeit in z-Richtung hat, ist die Intensität eines Besselstrahls nicht von z abhängig. Der Strahlquerschnitt bleibt also in dieser Richtung immer der gleiche, d.h. der Strahl ist nicht divergent.

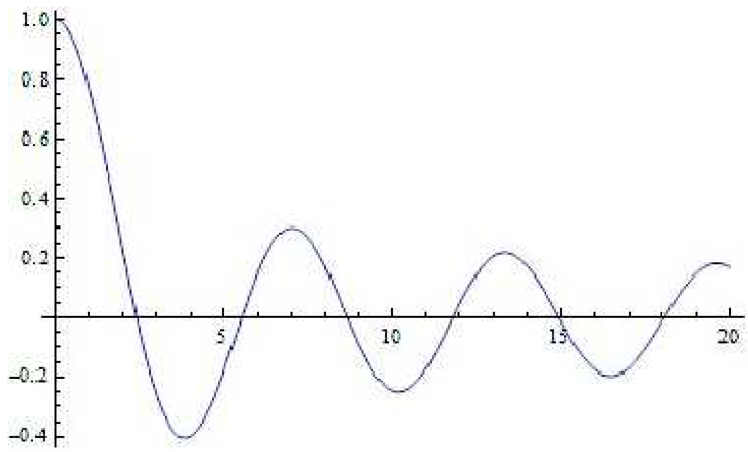

Figure 2: Bessel-Funktion erster Art und nullter Ordnung als Funktion des Ortes

d) Eine endliche Ausdehnung $\Delta\rho$ in radialer Richtung, impliziert nach der Unschärferelation eine endliche Unbestimmtheit bzgl. des transversalen Impulses. Anders ausgedrückt, hätten Photonen (mit Propagationsrichtung z) also einen Impuls in Richtung ρ und würden den (endlichen) Bereich des Strahles irgendwann verlassen. Dies würde implizieren, dass der Strahl transversal breiter würde, was im Widerspruch zur Annahme steht.

e) Die Lösung dieses scheinbaren Paradoxons bzgl. eines Besselstrahls liegt darin, dass der Besselstrahl keine endliche Ausdehnung hat. Dafür berechnet man $\Delta\rho$.

$$
\begin{aligned}
(\Delta\rho)^2 &= \int_0^\infty d\rho \cdot A(\rho) \cdot \rho^2 && (23)\\
&= \int_0^\infty d\rho \cdot C J_m(k_t\rho) e^{im\phi} \cdot \rho^2 && (24)\\
&\approx \int_0^\infty d\rho \cdot C \sqrt{\frac{2}{\pi k_t}} \rho^{\frac{3}{2}} \cos\left(k_t\rho - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{im\phi} && (25)\\
&\to \infty && (26)
\end{aligned}
$$

Ein Besselstrahl hat somit keine endliche transversale Ausdehnung und damit (nach der Unschärferelation) keinen transversalen Impuls - somit keine divergierende Komponente! Das Paradoxon ist damit gelöst. Im Gegensatz dazu, fällt bei einem Gaussstrahl der Exponentialterm schneller als der quadratische Term ab und das Integral bleibt endlich - der Strahl ist dafür aber divergent.